

## **ALGORYTM IDENTYFIKACJI ZMIENNYCH W CZASIE MODUŁÓW ODKSZTAŁCENIA POSTACIOWEGO I OBJĘTOŚCIOWEGO ROŚLINNYCH MATERIAŁÓW LEPKOSPĘŻYSTYCH**

Anna Stankiewicz, Krzysztof Gołacki

Akademia Rolnicza w Lublinie

**Streszczenie:** Celem pracy było opracowanie komputerowego algorytmu identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego materiałów liniowo lepkospężystych na podstawie uzyskanych eksperymentalnie czasowych przebiegów funkcji relaksacji naprężeń w walcowych próbkach badanego materiału w stanie jednoosiowego odkształcenia i naprężenia. Procedura identyfikacji realizowana jest dwustopniowo: na stopniu pierwszym wyznaczane są modele opisujące przebieg jednoosiowych funkcji relaksacji, drugi stopień procedury zapewnia wyznaczenie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego. Pokazano, że jeśli jednoosiowe funkcje relaksacji aproksymowane są czteroparametrowymi modelami Maxwella, to moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego można przedstawić jako kombinację czterech funkcji wykładniczych oraz składowych całkowych będących sumą pojedynczych, podwójnych oraz potrójnych splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Do identyfikacji jednoosiowych funkcji relaksacji opisanych modelem Maxwella zastosowano metodę Prony'ego. Stosując zaproponowany algorytm wyznaczono przebiegi w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego dla próbek korzeni buraka cukrowego na podstawie dyskretnych pomiarów sił reakcji próbki w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia oraz jednoosiowego naprężenia uzyskanych podczas niezależnych testów relaksacji naprężeń.

**Słowa kluczowe:** lepkospężystość, test relaksacji naprężeń, moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego, algorytm identyfikacji, funkcje Bessela

### **WPROWADZENIE**

Pomimo iż w ciągu ostatnich kilkadziesiąt lat powstały nowe metody badania i oceny odporności mechanicznej materiałów roślinnych, w tym także metody nieniszczące, określenie stanu naprężeń i odkształceń pod wpływem różnego typu obciążeń

---

Adres do korespondencji – Corresponding Author: Anna Stankiewicz, Katedra Podstaw Techniki Akademii Rolniczej w Lublinie, ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin, e-mail: astan@hortus.ar.lublin.pl

pozostaje nadal istotnym elementem charakterystyki mechanicznej warzyw i owoców. Dotyczy to zarówno przypadków obciążeń o charakterze quasi-statycznym, jak i dynamicznym. Aby poprawnie określić rozkłady naprężeń i odkształceń w lepkosprężystych materiałach roślinnych pod obciążeniem, konieczne jest wyznaczenie pewnych dodatkowych charakterystyk materiałowych, do których należą zależne od czasu moduły odkształcenia objętościowego i postaciowego [Rao i Steffe 1992]. Znajomość tych modułów umożliwia szczegółową analizę zachowań owoców i warzyw pod wpływem różnorodnych obciążeń i deformacji z wykorzystaniem metody elementów skończonych lub metody elementów brzegowych, stanowią one bowiem dane wejściowe dla obu metod.

Moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego nie są wprost dostępne pomiarowo, muszą więc być wyznaczone na podstawie innych charakterystyk uzyskanych doświadczalnie. De Baerdemeaker i Segerlind [1976] opracowali metodę wyznaczania zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego na bazie dwu standardowych testów relaksacji naprężeń wykonywanych w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia i naprężenia. Metoda ta jest stosowana także współcześnie [Rao i Steffe 1992, Gołacki 2002, Fincan i Dejmek 2003]. Zakres przedstawionej przez nich numerycznej procedury obliczeniowej wykorzystującej wielomiany Jacobiego, ze względu na własności tych wielomianów, jest jednak dość ograniczony.

Celem tej pracy jest przedstawienie kompletnego algorytmu obliczeniowego identyfikacji zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego. Pokazano, że gdy funkcje relaksacji naprężeń aproksymowane są czteroparametrowymi modelami Maxwella, to moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego można przedstawić jako kombinację funkcji wykładniczych oraz składowych całkowitych będących sumą pojedynczych, podwójnych oraz potrójnych splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Ta dokładna formuła analityczna jest podstawą opracowanego dwustopniowego algorytmu identyfikacji, w którym na stopniu pierwszym procedury, na podstawie dyskretnych pomiarów sił reakcji próbki w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia oraz jednoosiowego naprężenia zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń [Derski i Ziemia 1968, Gołacki 1998], wyznaczane są czteroparametrowe modele Maxwella opisujące przebieg jednoosiowych funkcji relaksacji naprężeń w badanym materiale, natomiast drugi stopień procedury zapewnia wyznaczenie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego.

## MATERIAŁ I METODY

### Moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego

Przyjmuje się, że dla materiałów liniowo lepkosprężystych moduł odkształcenia postaciowego  $G(t)$  i moduł odkształcenia objętościowego  $K(t)$  oraz funkcje relaksacji  $G_1(t)$  dla ścinania oraz  $G_2(t)$  dla równomiernego i wszechstronnego ściskania wiążą następujące liniowe związki [Christensen 1971]

$$G(t) = \frac{G_1(t)}{2} \quad (1)$$

$$K(t) = \frac{G_2(t)}{3} \quad (2)$$

Zarówno moduły  $G(t)$  i  $K(t)$  jak i funkcje relaksacji  $G_1(t)$  i  $G_2(t)$  nie są wprost dostępne pomiarowo. Można je jednak wyznaczyć na podstawie wyznaczonych doświadczalnie dla badanego materiału funkcji relaksacji  $X(t)$  w stanie jednoosiowego odkształcenia oraz funkcji relaksacji  $E(t)$  w stanie jednoosiowego naprężenia, korzystając z następujących zależności [Christensen 1971, De Baerdemeaker i Segerlind 1976]

$$E(s) = \frac{3G_1(s)G_2(s)}{G_1(s) + 2G_2(s)} \quad (3)$$

i

$$G_2(s) = 3X(s) - 2G_1(s) \quad (4)$$

gdzie  $E(s)$  i  $X(s)$  są transformatami Laplace'a funkcji relaksacji naprężeń  $E(t)$  i  $X(t)$ , natomiast  $G_1(s)$  i  $G_2(s)$  to transformaty Laplace'a funkcji relaksacji  $G_1(t)$  i  $G_2(t)$ . Na podstawie równań (3) i (4) łatwo wyprowadzić wzór [Gołacki 2002]

$$G_1(s) = \frac{1}{4}(E(s) + 3X(s)) - \frac{1}{4}\sqrt{(E(s) + 3X(s))^2 - 16E(s)X(s)} \quad (5)$$

Znając funkcje relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  transformaty Laplace'a modułów odkształcenia postaciowego  $G(t)$  i objętościowego  $K(t)$  można wyznaczyć korzystając kolejno z zależności (5), (4) oraz (1) i (2). Funkcje relaksacji naprężeń  $E(t)$  i  $X(t)$  można wyznaczyć eksperymentalnie, rejestrując siłę reakcji dwu próbek z tego samego materiału w warunkach jednoosiowego stanu naprężeń i jednoosiowego stanu odkształceń [Hughes i Segerlind 1972, Gołacki 2002]. Identyfikacja modułów  $G(t)$  i  $K(t)$  sprowadza się więc do numerycznego problemu wyznaczenia transformat Laplace'a  $E(s)$  i  $X(s)$  funkcji relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  na podstawie danych pomiarowych, a następnie wyznaczenie oryginału  $G_1(t)$  transformaty Laplace'a  $G_1(s)$  danej wzorem (5) oraz obliczenia  $G_2(t)$ ,  $G(t)$  i  $K(t)$  zgodnie z wzorami (4), (1) i (2). Wyznaczenie przebiegów czasowych modułów  $G(t)$  oraz  $K(t)$  umożliwia przedstawiony w tej pracy dwustopniowy algorytm, w którym na stopniu pierwszym procedury na podstawie dyskretnych pomiarów funkcji  $E(t)$  i  $X(t)$  wyznaczany jest czteroparametrowy model Maxwella opisujący przebieg relaksacji naprężeń w badanym materiale, natomiast drugi stopień procedury zapewnia wyznaczenie oryginału  $G_1(t)$  transformaty  $G_1(s)$  (5) oraz modułów odkształcenia postaciowego  $G(t)$  i objętościowego  $K(t)$ . Do identyfikacji jednoosiowych funkcji relaksacji opisywanych modelem Maxwella zastosowano metodę Prony'ego. De Baerdemeaker i Segerlind [1976] do wyznaczenia oryginału  $G_1(t)$  transformaty Laplace'a  $G_1(s)$  (5) zastosowali procedurę numeryczną opartą na przybliżeniu funkcji

$G_1(t)$  skończonym szeregiem ortogonalnych wielomianów Jacobiego. Jednak ze względu na własności tych wielomianów metoda ta pozwala aproksymować oryginał  $G_1(t)$  tylko dla bardzo małych czasów. W tej pracy pokazano, że dla czteroparametrowego modelu Maxwella funkcję relaksacji  $G_1(t)$  można przedstawić jako kombinację czterech funkcji wykładniczych oraz składowych całkowych będących sumą pojedynczych, podwójnych oraz potrójnych splotów pierwotnych i zmodyfikowanych funkcji Bessela pierwszego rodzaju. Funkcje Bessela są szeroko stosowane w fizyce [Tichonow i Samarski 1963], technice [Węgrzyn 1958] i teorii sygnałów [Szabatin 1990], znajdując także zastosowanie do opisu własności ośrodków lepkosprężystych [Gołacki i Stankiewicz 2002, Stankiewicz 2003].

### Identyfikacja funkcji relaksacji $E(t)$ i $X(t)$

Powszechnie przyjętym sposobem opisu zjawiska relaksacji zachodzącego w materiale liniowo-lepkosprężystym jest model Maxwella, opisujący funkcje relaksacji sumą dodatnich funkcji wykładniczych [Derski i Ziemia 1968, Christensen 1971]. Funkcje relaksacji  $E(t)$  oraz  $X(t)$  materiałów roślinnych można przybliżyć [De Baerdemeaker i Segerlind 1976, Chen i Chen 1986, Gołacki 1998] stosując czteroparametrowe modele Maxwella:

$$E(t) = A_{11}e^{-b_{11}t} + A_{12}e^{-b_{12}t} \quad (6a)$$

$$X(t) = A_{21}e^{-b_{21}t} + A_{22}e^{-b_{22}t} \quad (6b)$$

Chen i Fridley [1972] pokazali, że jeśli funkcje relaksacji  $E(t)$  oraz  $X(t)$  opisane są modelami Maxwella (6a) i (6b), to siły reakcji próbki ściskanej wzdłuż osi w stanie jednoosiowego naprężenia i w stanie jednoosiowego odkształcenia, w drugiej fazie testu relaksacji naprężeń, w której utrzymywane jest stałe odkształcenie opisują modele

$$F_E(t) = a_{11}e^{-b_{11}(t-t_m)} + a_{12}e^{-b_{12}(t-t_m)}, \quad t \geq t_m \quad (7a)$$

$$F_X(t) = a_{21}e^{-b_{21}(t-t_m)} + a_{22}e^{-b_{22}(t-t_m)}, \quad t \geq t_m \quad (7b)$$

gdzie  $l$  oznacza wysokość, a  $p$  pole przekroju poprzecznego próbki,  $v$  jest prędkością deformacji,  $t_m$  to czas narastania odkształcenia. Parametry  $a_{ji}$  i  $A_{ji}$  wiążą równości

$$a_{ji} = \frac{pvA_{ji}}{lb_{ji}} \left(1 - e^{-b_{ji}t_m}\right), \quad j = 1, 2, i = 1, 2 \quad (8)$$

Będziemy zakładać, że przeprowadzono eksperyment dyskretny (test relaksacji naprężeń), którego rezultatem jest zbiór pomiarów siły reakcji badanej próbki w stanie jednoosiowego naprężenia  $F_E(t_i)$  i siły reakcji w stanie jednoosiowego odkształcenia  $F_X(t_i)$  zgromadzonych w drugiej fazie testu, czyli dla  $t_i \geq t_m$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ .

W klasycznie sformułowanych zadaniach wyboru optymalnych modeli postaci (7a) i (7b) współczynniki  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  i  $a_{22}$  oraz wykładniki  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{21}$  i  $b_{22}$  w tych

modelach dobiera się tak, aby przybliżyły one wyniki eksperymentu jak najlepiej w sensie najmniejszej sumy kwadratów

$$\min_{(a_{11}, a_{12}, b_{11}, b_{12})} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ F_E(t_i) - (a_{11}e^{-b_{11}(t_i-t_m)} + a_{12}e^{-b_{12}(t_i-t_m)}) \right]^2 \quad (9a)$$

$$\min_{(a_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22})} \sum_{i=0}^{N-1} \left[ F_X(t_i) - (a_{21}e^{-b_{21}(t_i-t_m)} + a_{22}e^{-b_{22}(t_i-t_m)}) \right]^2 \quad (9b)$$

Zadania (9) są nieliniowymi problemami najmniejszych kwadratów. Jak wiadomo, numeryczne wyznaczenie optymalnych parametrów  $a_{ji}$  i wykładników  $b_{ji}$  jest jednak nawet w przypadku sumy dwu funkcji wykładniczych zadaniem skomplikowanym, stosunkowo trudnym w implementacji, a przede wszystkim źle postawionym [Kammler 1979, Varah 1985]. Kammler [1979] wykazał, że jeżeli ciąg danych pomiarowych (tu:  $\{F_X(t_i)\}$  oraz  $\{F_E(t_i)\}$ ) jest monotonicznie malejący, to optymalne modele postaci (7a) i (7b) istnieją i zarówno parametry  $a_{ij}$ , jak i wykładniki  $b_{ij}$  są dodatnie. Lanczos [1956], a następnie Kammler [1979] oraz Varah [1985] pokazali, iż nawet w rozpatrywanym tu zadaniu aproksymacji ciągu monotonicznie malejącego sumą dwu funkcji wykładniczych, może istnieć kilka modeli optymalnych, Lanczos wskazał także na skrajną wrażliwość wykładników  $b_{ij}$  na nawet bardzo małe zaburzenia danych. Standardowe numeryczne techniki minimalizacji, takie jak algorytmy kierunków poprawy, metody quasi-newtonowskie lub metody kierunków sprzężonych, nie są więc skutecznym narzędziem rozwiązania zadania nieliniowych najmniejszych kwadratów dla modeli wykładniczych, szczególnie wówczas, gdy nie dysponujemy dobrym punktem startowym. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat opracowano kilka specjalnych metod aproksymacji danych pomiarowych sumą funkcji wykładniczych [Evans i in. 1980, Kamler 1979, Ruhe 1980]. Osborne [1975], a następnie Osborne i Smyth [1995] oraz Petersson i Holmström [1998] zastosowali do rozwiązania zadania aproksymacji danych sumą funkcji wykładniczych ideę starej osiemnastowiecznej metody Prony'ego [1795]. W tej pracy zastosowano modyfikację metody Prony'ego przypisywaną Hildebrandowi [1956], omówioną szczegółowo w pracy [Stankiewicz 2004], która w przypadku dwuwymiarowym prowadzi do bardzo prostego w implementacji dwuetapowego schematu identyfikacji.

#### Zastosowanie metody Prony'ego do identyfikacji modelu Maxwella

Rozważmy problem aproksymacji danego zbioru obserwacji  $\{t_i, F(t_i)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , sumą dwu funkcji wykładniczych

$$F(t) = a_1 e^{-b_1(t-t_0)} + a_2 e^{-b_2(t-t_0)} \quad (10)$$

Będziemy zakładać, że pomiary  $F(t_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , przeprowadzono w stałych odstępach czasu  $\Delta$  poczynając od  $t_0 \geq 0$ , czyli  $t_i = t_0 + i\Delta$ . Zachodzą wówczas równości

$$F(t_i) = F(t_0 + i\Delta) = a_1 q_1^i + a_2 q_2^i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (11)$$

gdzie

$$q_1 = e^{-b_1 \Delta}, \quad q_2 = e^{-b_2 \Delta} \quad (12)$$

Niech  $q_1$  i  $q_2$  będą pierwiastkami następującego równania algebraicznego

$$q^2 + p_2 q + p_1 = 0 \quad (13)$$

Łatwo sprawdzić, że zachodzą następujące liniowe równania różnicowe

$$F(t_{i+2}) + p_2 F(t_{i+1}) + p_1 F(t_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N-3 \quad (14)$$

Wprowadzając notację wektorowo-macierzową

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} F(t_0) & F(t_1) \\ F(t_1) & F(t_2) \\ \vdots & \vdots \\ F(t_{N-3}) & F(t_{N-2}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -F(t_2) \\ -F(t_3) \\ \vdots \\ -F(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

układ równań (14) można zapisać w zwartej postaci

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} \mathbf{p} \quad (16)$$

Stosując do równania (16) metodę najmniejszych kwadratów, czyli minimalizując kwadratowy wskaźnik jakości  $\|\mathbf{U} - \mathbf{W} \mathbf{p}\|^2$  zależny od wektora  $\mathbf{p}$ , otrzymujemy następujące oszacowanie wektora współczynników układu równań różnicowych (14)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{U}$$

Znając współczynniki  $p_1$  i  $p_2$  możemy łatwo policzyć pierwiastki  $q_1$  i  $q_2$  równania kwadratowego (13) oraz na podstawie wzorów (12) parametry  $b_1$  i  $b_2$ .

Parametry  $a_1$  i  $a_2$  wyznaczmy na podstawie układu równań (11). Układ ten można zapisać w postaci wektorowo-macierzowej

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \mathbf{a} \quad (17)$$

gdzie wektor wszystkich pomiarów  $\hat{\mathbf{U}}$  oraz wektor parametrów  $\mathbf{a}$  i macierz  $\mathbf{Q}$  są następujące

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \\ \vdots & \vdots \\ q_1^{N-1} & q_2^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} F(t_0) \\ F(t_1) \\ \vdots \\ F(t_{N-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Stosując ponownie metodę najmniejszych kwadratów do równania (17), otrzymujemy

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{U}}$$

Łatwo zauważyć, że obliczenia realizowane są dwuetapowo. Najpierw wyznaczone są współczynniki liniowych równań różnicowych (14) optymalne w sensie najmniejszych kwadratów oraz wykładniki  $b_1$  i  $b_2$ , czyli parametry nieliniowe modelu (10). Następnie wyznacza się parametry liniowe modelu  $a_1$  i  $a_2$ , stosując ponownie metodę najmniejszych kwadratów. Taka dekompozycja zadania identyfikacji modelu (10) powoduje, że otrzymany model jest z reguły suboptymalny w sensie globalnego klasycznego kwadratowego wskaźnika jakości identyfikacji postaci

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left[ F(t_i) - (a_1 e^{-b_1(t_i-t_0)} + a_2 e^{-b_2(t_i-t_0)}) \right]^2$$

Obliczenia są jednak znacznie szybsze niż przy bezpośredniej minimalizacji wskaźnika jakości, metoda nie wymaga też wyznaczania wektora gradientu i macierzy hesjanu funkcji celu. Metoda nie wymaga także doboru punktu startowego i zapewnia bardzo dobre rezultaty w przypadku pomiarów bezszumowych oraz przy niewielkich zakłóceniach. W przypadku silniejszych zakłóceń lepsze rezultaty można osiągnąć, stosując mniej efektywną obliczeniowo metodę Osborna i Smytha [1995], ewentualnie stosując wstępną filtrację sygnałów.

Jeśli rzeczywista funkcja  $F(t)$  opisana jest sumą dwu dodatnich funkcji wykładniczych, a jej pomiary nie są obciążone zakłóceniami, to przedstawiona procedura identyfikacji prowadzi do wyznaczenia rzeczywistych parametrów  $b_1$  i  $b_2$  oraz  $a_1$  i  $a_2$ , czyli zapewnia ich identyfikowalność [Stankiewicz 2004, Twierdzenie 1]. W pracy [Stankiewicz 2004] podano także warunki, przy których wszystkie zadania obliczeniowe algorytmu są dobrze postawione w sensie Hadamarda [Gutenbaum 2003], tzn. ich rozwiązania istnieją, są jednoznaczne i ciągłe względem danych. Przeprowadzono także dyskusję i podano warunki (głównie wystarczające) stosowalności przedstawionego algorytmu do zadania identyfikacji czteroparametrowych modeli Maxwella, tzn. warunki przy których nie tylko wszystkie zadania obliczeniowe algorytmu są dobrze postawione, ale także uzyskane rozwiązanie jest fizycznie sensowne, czyli parametry  $b_1$  i  $b_2$  oraz  $a_1$  i  $a_2$  są rzeczywiste, dodatnie i takie, że  $b_1 \neq b_2$ .

Parametry liniowe  $A_{ji}$  modeli Maxwella (6) łatwo obliczyć na podstawie równań (8).

#### Wyznaczenie modułów odkształcenia postaciowego $G(t)$ i objętościowego $K(t)$

Przejdziemy obecnie do wyznaczenia modułów odkształcenia postaciowego  $G(t)$  i objętościowego  $K(t)$ . Na podstawie zależności (1), (2), (4) oraz (5) i (6) do wyznaczenia przebiegów czasowych tych modułów niezbędne jest wyznaczenie oryginału  $G(t)$  transformaty Laplace'a  $G_1(s)$  danej wzorem (5) lub równoważną formułą:

$$G_1(s) = \frac{1}{4} (E(s) + 3X(s)) - \frac{1}{4} \sqrt{(9X(s) - E(s))(X(s) - E(s))}$$

gdzie  $E(s)$ ,  $X(s)$  są transformatami Laplace'a empirycznych funkcji relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  danych modelami Maxwella (6a) i (6b). Transformatę  $G_1(s)$  można przedstawić jako różnicę:

$$G_1(s) = U_1(s) - W(s) \quad (19)$$

wyrażenia  $U_1(s) = \frac{1}{4}(E(s) + 3X(s))$  o oryginalnie danym sumą czterech funkcji wykładniczych

$$U_1(t) = \frac{1}{4}(A_{11}e^{-b_{11}t} + A_{12}e^{-b_{12}t} + 3A_{21}e^{-b_{21}t} + 3A_{22}e^{-b_{22}t})$$

oraz funkcji

$$W(s) = \frac{1}{4}\sqrt{(9X(s) - E(s))(X(s) - E(s))} \quad (20)$$

Łatwo sprawdzić, że pod pierwiastkiem w (20) występuje wyrażenie wymierne, którego licznik jest wielomianem zmiennej zespolonej  $s$  rzędu 6., a mianownik wielomianem rzędu 8. Funkcję  $W(s)$  można jednak przedstawić w równoważnej postaci

$$W(s) = U_2(s)\sqrt{Y(s)} \quad (21)$$

gdzie  $U_2(s) = \frac{1}{4}(X(s) - E(s))$  jest wyrażeniem wymiernym, którego oryginał dany jest wzorem

$$U_2(t, \mathbf{c}) = \frac{1}{4}(A_{21}e^{-b_{21}t} + A_{22}e^{-b_{22}t} - A_{11}e^{-b_{11}t} - A_{12}e^{-b_{12}t})$$

natomiast

$$Y(s) = \frac{9X(s) - E(s)}{X(s) - E(s)} \quad (22)$$

jest wyrażeniem wymiernym, którego licznik i mianownik są wielomianami rzędu 3. Postać oryginału Laplace'a funkcji  $Z(s) = \sqrt{Y(s)}$  zależy od własności funkcji  $Y(s)$ . Wyrażenie wymierne  $Y(s)$  można przestawić w postaci:

$$Y(s) = M \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3)}{(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)} \quad (23)$$

gdzie  $M = (9A_{21} + 9A_{22} - A_{11} - A_{12}) / (A_{21} + A_{22} - A_{11} - A_{12})$ . Zera  $z_1, z_2, z_3$  oraz bieguny  $s_1, s_2, s_3$  funkcji  $Y(s)$  zależą od parametrów  $A_{11}, A_{12}, b_{11}, b_{12}$  i  $A_{21}, a_{22}, b_{21}, b_{22}$  modeli (6), ich położenie na płaszczyźnie zespolonej decyduje o postaci oryginału transformaty  $\sqrt{Y(s)}$ .

Możliwe są cztery komplementarne przypadki:

- (i)  $z_1, z_2, z_3$  oraz  $s_1, s_2, s_3$  są rzeczywiste



(ii)  $z_1, z_2, z_3$  oraz  $s_1$  są rzeczywiste a  $s_2$  i  $s_3$  są zespolone

(iii)  $z_1$  jest rzeczywiste,  $z_2, z_3$  są zespolone, natomiast  $s_1, s_2, s_3$  są rzeczywiste

(iv)  $z_1$  i  $s_1$  są rzeczywiste,  $z_2, z_3$  oraz  $s_2, s_3$  są zespolone.

Oryginał Laplace'a funkcji  $Z(s) = \sqrt{Y(s)}$  podaje następujące twierdzenie. Zdefiniujemy:

$$f_i(t) = p_i e^{q_i t} [I_0(p_i t) + I_1(p_i t)], \quad p_i = \frac{s_i - z_i}{2}, \quad q_i = \frac{s_i + z_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie  $I_n(x)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela pierwszego rodzaju  $n$ -tego rzędu [Tichonow i Samarski 1963].

Będziemy przyjmować, że

(A1) parametry liniowe modeli (6) spełniają warunek  $A_{21} + A_{22} > A_{11} + A_{12}$ .

Założenie to jest naturalne w kontekście modelowania zjawisk relaksacji jeśli modele (6) stanowią dobre przybliżenie rzeczywistych funkcji relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$ , ponieważ funkcje relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  spełniają warunek  $E(0) < X(0)$ .

**Twierdzenie** [Stankiewicz 2000]. *Jeśli spełnione jest założenie (A1), to oryginał transformaty Laplace'a  $Z(s) = \sqrt{Y(s)}$ , gdzie  $Y(s)$  jest wyrażeniem wymiernym (22), istnieje i przyjmuje ogólną postać:*

$$Z(t) = \sqrt{M} \left[ f_1(t) + g_1(t) + \int_0^t f_1(\tau) g_1(t - \tau) d\tau + \delta(t) \right] \quad (24)$$

gdzie  $\delta(t)$  oznacza deltę Diraca, a funkcje  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , odpowiadające przypadkom (i)-(iv), są następujące:

$$(i) \quad g_1(t) = f_2(t) + f_3(t) + \int_0^t f_2(\tau) f_3(t - \tau) d\tau$$

$$(ii) \quad g_2(t) = h_1(t) + h_2(t) + \int_0^t h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau$$

$$(iii) \quad g_3(t) = (u_4 - r_4) h_3(t) + u_3 h_4(t) + \frac{r_3^2}{2} \left[ \int_0^t h_5(\tau) h_3(t - \tau) d\tau \right]$$

$$(iv) \quad g_4(t) = (r_4 - r_2) h_6(t) - r_1 h_7(t) + \frac{r_3^2}{2} \left[ \int_0^t h_6(\tau) h_5(t - \tau) d\tau \right]$$

gdzie:

$$h_1(t) = u_1 e^{u_1 t} [I_0(u_1 t) + I_1(u_1 t)]$$

$$h_2(t) = e^{r_2 t} [(r_2 - z_3)J_0(r_1 t) - r_1 J_1(r_1 t)]$$

$$h_{i+3}(t) = e^{u_4 t} I_i(u_3 t), \quad i = 0, 1$$

$$h_5(t) = e^{r_4 t} [J_0(r_3 t) + J_2(r_3 t)]$$

$$h_{i+6}(t) = e^{r_2 t} J_i(r_1 t), \quad i = 0, 1$$

$$u_1 = (z_3 - z_2)/2, \quad u_2 = (z_3 + z_2)/2, \quad u_3 = (s_3 - s_2)/2, \quad u_4 = (s_3 + s_2)/2$$

$$r_1 = |Im(s_2)|, \quad r_2 = Re(s_2), \quad r_3 = |Im(z_2)|, \quad r_4 = Re(z_2)$$

natomiast  $J_n(x)$  oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju  $n$ -tego rzędu.

Dowód twierdzenia [Stankiewicz 2000] bazuje na odpowiednim rozwinięciu funkcji  $Y(s)$  (23) w każdym z przypadków (i)-(iv) w szereg potęgowy Newtona, wykorzystuje własności funkcji Bessela i całkowitego przekształcenia Laplace'a.

Na podstawie równości (21) i (24) wykorzystując twierdzenie Borela o transformacie splotu funkcji oraz selektywność delty Diraca  $\delta(t)$  mamy:

$$W(t) = \sqrt{M} U_2(t) + \sqrt{M} \int_0^t U_2(\tau) Z(t - \tau) d\tau$$

Stąd, wobec (19), oryginał transformaty modułu relaksacji ścinania  $G_1(s)$  dany jest wzorem:

$$G_1(t) = U_1(t) - \sqrt{M} U_2(t) - \sqrt{M} \int_0^t U_2(\tau) Z(t - \tau) d\tau$$

Na podstawie (1) moduł odkształcenia postaciowego  $G(t)$

$$G(t) = \frac{1}{2} U_1(t) - \frac{1}{2} \sqrt{M} U_2(t) - \frac{1}{2} \sqrt{M} \int_0^t U_2(\tau) Z(t - \tau) d\tau \quad (25)$$

a uwzględniając (2) oraz (4) otrzymujemy wzór na moduł odkształcenia objętościowego  $K(t)$

$$K(t) = X(t) - \frac{2}{3} U_1(t) + \frac{2}{3} \sqrt{M} U_2(t) + \frac{2}{3} \sqrt{M} \int_0^t U_2(\tau) Z(t - \tau) d\tau$$

## WYNIKI I DYSKUSJA

### Dwustopniowy algorytm identyfikacji

Moduły odkształcenia postaciowego  $G(t)$  i objętościowego  $K(t)$  można wyznaczyć na podstawie podwójnego testu relaksacji naprężeń, stosując następującą procedurę:

**Stopień 1:** Identyfikacja jednoosiowych funkcji relaksacji naprężeń.

*Krok 1.* Przeprowadź eksperyment i wyznacz zbiory pomiarów  $\{F_E(t_i)\}$  i  $\{F_X(t_i)\}$  sił reakcji próbek w stanach jednoosiowego naprężenia i jednoosiowego odkształcenia przeprowadzonych w stałych odstępach czasu  $\Delta$ , tzn. dla  $t_i = t_m + i\Delta$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

*Krok 2.* Utwórz macierze i wektory pomiarów  $W_E$ ,  $W_X$  oraz  $U_E$  i  $U_X$  o strukturze (15) a następnie wyznacz wektory

$$p_E = (W_E^T W_E)^{-1} W_E^T U_E = \begin{bmatrix} p_{E1} \\ p_{E2} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad p_X = (W_X^T W_X)^{-1} W_X^T U_X = \begin{bmatrix} p_{X1} \\ p_{X2} \end{bmatrix}$$

*Krok 3.* Oblicz pierwiastki  $q_{E1}$  i  $q_{E2}$  oraz  $q_{X1}$  i  $q_{X2}$  równań kwadratowych

$$q_E^2 + p_{E2}q_E + p_{E1} = 0 \quad \text{i} \quad q_X^2 + p_{X2}q_X + p_{X1} = 0$$

a następnie wyznacz wykładniki

$$b_{11} = -\ln(q_{E1})/\Delta, \quad b_{12} = -\ln(q_{E2})/\Delta \quad \text{i} \quad b_{21} = -\ln(q_{X1})/\Delta, \quad b_{22} = -\ln(q_{X2})/\Delta$$

*Krok 4.* Utwórz macierze  $Q_E$  i  $Q_X$  oraz wektory pomiarów  $\hat{U}_E$  i  $\hat{U}_X$  o strukturze (18) a następnie oblicz wektory parametrów liniowych

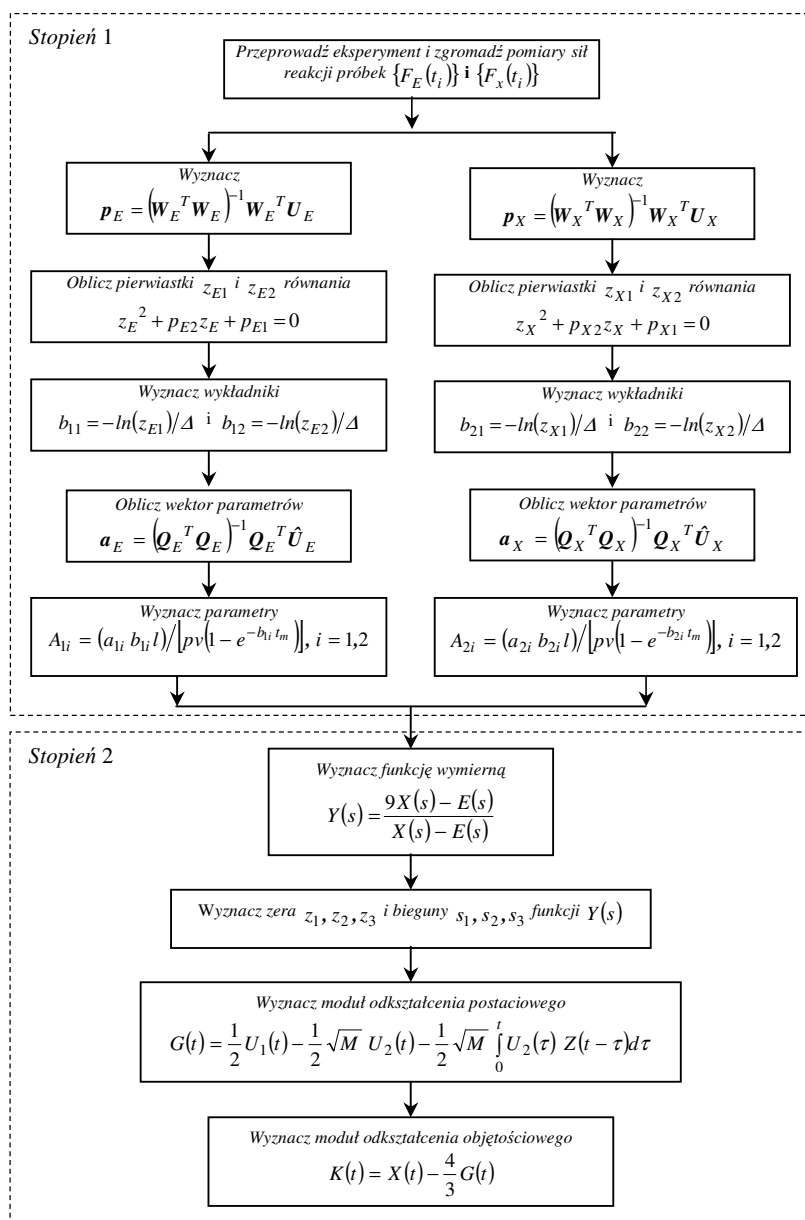
$$a_E = (Q_E^T Q_E)^{-1} Q_E^T \hat{U}_E = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad a_X = (Q_X^T Q_X)^{-1} Q_X^T \hat{U}_X = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

*Krok 5.* Wyznacz parametry  $A_{ji} = (a_{ji} b_{ji} t) / \left[ p v (1 - e^{-b_{ji} t_m}) \right]$ ,  $j = 1, 2, i = 1, 2$ .

**Stopień 2:** Identyfikacja modułów  $G(t)$  i  $K(t)$ .

*Krok 6.* Wyznacz zera  $z_1, z_2, z_3$  i bieguny  $s_1, s_2, s_3$  wyrażenia wymiernego  $Y(s)$  (22) a następnie wyznacz moduł odkształcenia postaciowego  $G(t)$  zgodnie z wzorem (25) i moduł odkształcenia objętościowego  $K(t) = X(t) - 4G(t)/3$ .

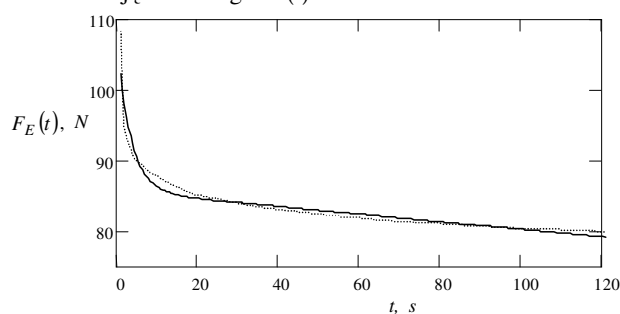
Schemat dwustopniowych obliczeń przedstawiono na rysunku 1. Łatwo zauważyć, że obliczenia w krokach 2–5 realizowane są równoległe dla funkcji relaksacji  $E(t)$  oraz  $X(t)$ .

Rys. 1. Schemat algorytmu wyznaczania modułów  $G(t)$  i  $K(t)$ Fig. 1. Flow chart of the scheme for determining  $G(t)$  and  $K(t)$  modulus

W procedurze wyznaczania modeli Maxwella, realizowanej na stopniu pierwszym, wszystkie obliczenia przeprowadzane są na macierzach dwuwymiarowych. Zera i bieguny wyrażenia wymiernego  $Y(s)$  można wyznaczyć, stosując znane wzory Cardana. Do wyznaczenia całek spłotowych (24) i (25) można zastosować standardowe metody całkowania numerycznego.

### Materiał badawczy i przebieg eksperymentu

Badania eksperymentalne przeprowadzono na próbkach korzeni buraka cukrowego odmiany Oktawia. Z każdego korzenia wycinano dwie walcowe próbki o średnicy i wysokości  $l = 20 \text{ mm}$ . Próbki były ściskane wzdłuż osi z prędkością  $v = 0,833 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$  o wartość  $0,8 \text{ mm}$ , co odpowiadało odkształceniu 4%. Pierwsza próbka ściskana była między dwiema równoległymi płytkami w warunkach stanu jednoosiowego naprężenia. Drugą próbkę umieszczano w stalowym cylindrze uniemożliwiającym jej boczne odkształcenie i ściskano poprzez przesuwanie tłoka w warunkach stanu jednoosiowego odkształcenia. Po osiągnięciu założonej wartości odkształcenia (po czasie  $t_m = 1 \text{ s}$ ) przerywano ściskanie i zarejestrowano malejącą w miarę upływu czasu siłę reakcji próbki w  $N = 240$  punktach pomiarowych, rozłożonych równomiernie w przedziale czasu  $0 \div 120 \text{ s}$ . Zakładając, że materiał obu próbek jest identyczny zastosowano przedstawioną procedurę identyfikacji. Przebieg zarejestrowanych sił reakcji próbek w stanie jednoosiowego naprężenia  $F_E(t)$  i w stanie jednoosiowego odkształcenia  $F_X(t)$  oraz wyznaczone modele postaci (7a) i (7b) przedstawiają, odpowiednio, rysunki 2a i 2b. Parametry modeli (7) i modeli Maxwella (6) wyznaczone w krokach 3, 4 i 5 procedury identyfikacji zestawiono w tabeli 1. Przebieg jednoosiowych funkcji relaksacji  $E(t)$  i  $X(t)$  opisanych modelami (6) przedstawia rysunek 3. Na rysunku 4a przedstawiono przebieg modułu odkształcenia postaciowego  $G(t)$ , a na rysunku 4b przebieg modułu odkształcenia objętościowego  $K(t)$ .

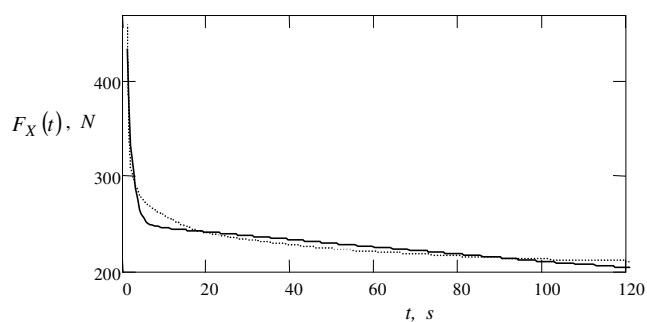
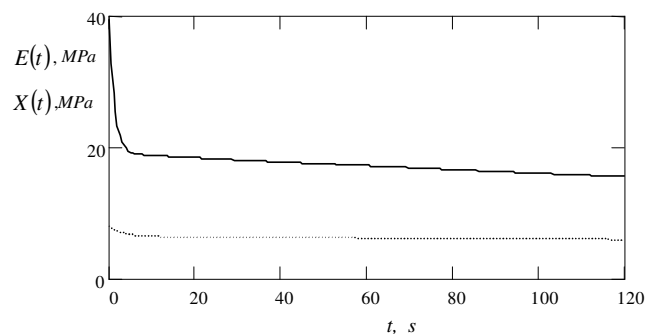


Rys. 2a. Przebiegi siły  $F_E(t)$  reakcji cylindrycznej próbki korzenia buraka cukrowego Oktawia w stanie jednoosiowego naprężenia: uzyskany eksperymentalnie (linia przerywana) oraz wyznaczony na podstawie modelu (linia ciągła)

Fig. 2a. Reaction force  $F_E(t)$  of the cylindrical specimens of a sample of the sugar beet Oktawia root in the state of uniaxial stress: experimental results (dash line) and model predictions (solid line)

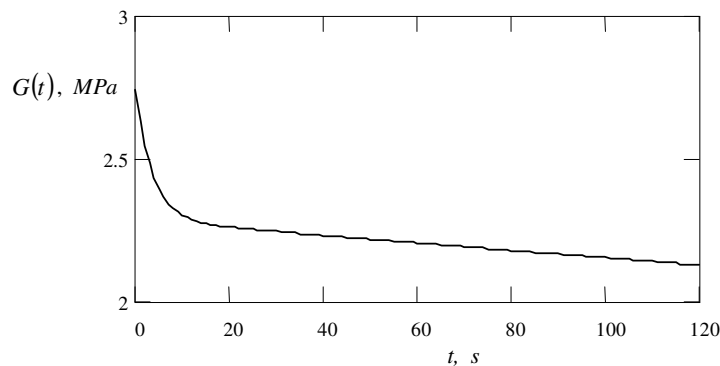
Tabela 1. Parametry  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  oraz  $A_{ij}$  modeli (6) i (7)Table 1. The parameters  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  and  $A_{ij}$  for (6) and (7) models

Parametry liniowe modeli (7)	Wykładniki	Parametry liniowe modeli Maxwella (6)
$a_{11} = 16,6152 \text{ N}$	$b_{11} = 0,2961 \text{ s}^{-1}$	$A_{11} = 1,4665 \text{ MPa}$
$a_{12} = 85,7351 \text{ N}$	$b_{12} = 0,000655 \text{ s}^{-1}$	$A_{12} = 6,5518 \text{ MPa}$
$a_{21} = 184,5779 \text{ N}$	$b_{21} = 0,7819 \text{ s}^{-1}$	$A_{21} = 20,3249 \text{ MPa}$
$a_{22} = 250,1344 \text{ N}$	$b_{22} = 0,001686 \text{ s}^{-1}$	$A_{22} = 19,1249 \text{ MPa}$

Rys. 2b. Przebiegi siły  $F_X(t)$  reakcji próbki korzenia buraka cukrowego Oktawia w stanie jednoosiowego odkształcenia: uzyskany eksperymentalnie (linia przerywana) oraz wyznaczony na podstawie modelu (linia ciągła)Fig. 2b. Reaction force  $F_X(t)$  of the cylindrical specimens of a sample of the sugar beet Oktawia root in the state of uniaxial strain: experimental results (dash line) and model predictions (solid line)Rys. 3. Jednoosiowe funkcje relaksacji  $E(t)$  (linia przerywana) i  $X(t)$  (linia ciągła) próbki korzenia buraka cukrowegoFig. 3. Uniaxial relaxation functions  $E(t)$  (dash line) and  $X(t)$  (solid line) of a sample of the sugar beet root

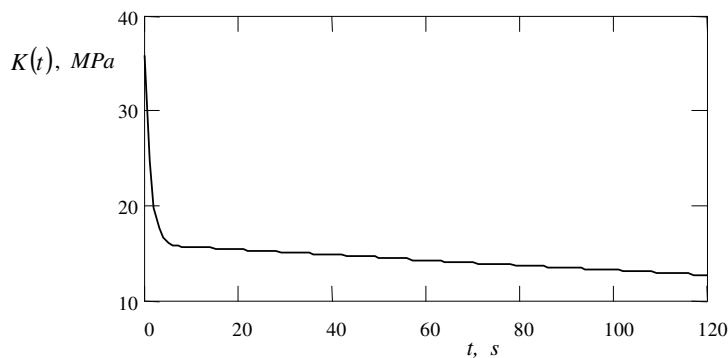
**PODSUMOWANIE**

W pracy przedstawiono kompletny algorytm wyznaczania zmiennych w czasie modułów odkształcenia postaciowego i objętościowego materiałów lepkosprężystych na podstawie uzyskanych eksperymentalnie czasowych przebiegów funkcji relaksacji ba-



Rys. 4a. Zmienny w czasie moduł odkształcenia postaciowego  $G(t)$  próbki korzenia buraka cukrowego Oktawia

Fig. 4a. Time-dependent shear modulus  $G(t)$  of a sample of the sugar beet Oktawia root



Rys. 4b. Zmienny w czasie moduł odkształcenia objętościowego  $K(t)$  próbki korzenia buraka cukrowego Oktawia

Fig. 4b. Time-dependent bulk modulus  $K(t)$  of a sample of the sugar beet Oktawia root

danego materiału w stanie jednoosiowego odkształcenia i naprężenia, w którym wszystkie obliczenia realizowane są na podstawie nieiteracyjnych formuł analitycznych. Mimo że procedura identyfikacji została opracowana z myślą o materiałach biologicznych, może ona znaleźć zastosowanie do badania własności dowolnych ośrodków liniowo lepkosprężystych.

**PIŚMIENNICTWO**

- Chen P., Chen S., 1986. Stress relaxation functions of apple under high loading rates. *Transaction of the ASAE*. 29, 1754-1759.
- Chen P., Fridley R. B., 1972. Analytical method for Determining Viscoelastic Constants of Agricultural Materials. *Transaction of the ASAE*. 15, 1103-1106.
- Christensen R. M., 1971. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. Academic Press New York.
- De Baerdemeaker J. G., Segerlind L. J., 1976. Determination of the viscoelastic properties of the apple flesh. *Transaction of the ASAE*. 19, 346-353.
- Derski W., Ziemia S., 1968. *Analiza modeli reologicznych*. PWN Warszawa.
- Evans J. W., Gragg W.B., LeVeque R. J., 1980. On Least-Squares Exponential Sum Approximation with Positive Coefficients. *Mathematics of Computations*. 34(149), 203-211.
- Fincan M., Dejmek P., 2003. Effect of osmotic pretreatment and pulsed electric field on the viscoelastic properties of potato tissue. *Journal of Food Engineering*, 59, 169-175
- Gołacki K., 1998. Charakterystyki lepkosprężyste korzeni marchwi w szerokim zakresie prędkości obciążeń mechanicznych. *Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie*. 216.
- Gołacki K., 2002. Lepkosprężyste charakterystyki korzeni buraków cukrowych. *Acta Agrophysica*. 78, 37-49.
- Gołacki K., Stankiewicz A., 2002. Algorytm obliczeniowy wyznaczania współczynnika Poissona lepkosprężystego materiału roślinnego. *Acta Agrophysica*. 78, 51-61.
- Gutenbaum J., 2003. *Modelowanie matematyczne systemów*. Akad. Ofic. Wyd. EXIT Warszawa.
- Hildebrand F. B., 1956. *Introduction to Numerical Analysis*. McGraw-Hill New York.
- Hughes H., Segerlind L. J., 1972. A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio of biological materials. *ASAE Paper No. 72-310*, ASAE, St. Joseph, MI 49085.
- Kammler D. W., 1979. Least squares approximation of completely monotonic functions by sums of exponentials. *SIAM J. Numer. Anal.* 16(5), 801-818.
- Lanczos C., 1956. *Applied Analysis*. Prentice Hall Englewood Cliffs.
- Osborne, M. R., 1975. Some special nonlinear least squares problems. *SIAM J. Num. Anal.* 12, 571-592.
- Osborne, M. R., Smyth, G. K., 1995. A modified Prony algorithm for fitting sums of exponential functions. *SIAM J. Sci. Comput.* 16, 119-138.
- Petersson J., Holmström K., 1998. Initial values for two-classes of exponential sum least squares fitting problems. *Research Report IMA-TOM-1998-07*. Mälardalen University, Sweden.
- Prony G. R., 1795. *Essai expérimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures*. *J. École Polytechn.* 1(22), 24-76.
- Rao M. A., Steffe J. F., 1992. *Viscoelastic properties of foods*. Elsevier Ltd London
- Ruhe A., 1980. Fitting empirical data by positive sums of exponentials. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1(4), 481-498.
- Stankiewicz A., 2000. Algorytm wyznaczania oryginałów transformat Laplace'a wybranych funkcji. *Praca niepubl. Inst. Podstaw Techn., AR Lublin*.
- Stankiewicz A., 2003. Algorytm identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji biologicznych materiałów lepkosprężystych. *Acta Sci. Pol., Technica Agraria*. 2(2), 77-91.
- Stankiewicz A., 2004. Identyfikacja modeli matematycznych lepkosprężystych materiałów biologicznych metodą Prony'ego. *Acta Sci. Pol., Technica Agraria (w druku)*.
- Szabatin J., 1990. *Podstawy teorii sygnałów*. WKŁ, Warszawa.
- Tichonow A. N., Samarski A. A., 1963. *Równania fizyki matematycznej*. PWN Warszawa.
- Varah J. M., 1985. On fitting exponentials by nonlinear least squares. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 6 (1), 30-44.



Węgrzyn S., 1958. Przebiegi nieustalone w elektrycznych liniach i układach łańcuchowych. PWN Warszawa.

## A SCHEME FOR IDENTIFICATION OF TIME-VARIABLE SHEAR AND BULK MODULUS OF PLANT VISCOELASTIC MATERIALS

**Abstract.** The aim of the paper is to investigate a computer identification algorithm for determining the time-varying shear and bulk modulus of linear viscoelastic materials based on experimentally obtained stress and strain uniaxial relaxation functions of an cylindrical specimens of the tested material is proposed. On the first stage of the identification procedure the models of the uniaxial relaxation functions are determined and next, on the second stage, the shear and bulk modulus are computed. It is proved that if four parameter Maxwell models are used to approximate the uniaxial relaxation functions, then the shear and bulk modulus can be given as a linear combination of exponential functions and multiple convolution integrals of original and modified Bessel functions. For least squares identification of uniaxial relaxation functions by positive sums of exponentials the Prony's method is applied. Applying the scheme proposed the time-dependent shear and bulk modulus of the beet sugar root samples are computed using discrete time-measurements of the force relaxation of an unconfined and of a laterally constrained cylindrical specimens of the material obtained in double independent stress relaxation tests.

**Key words:** viscoelasticity, stress relaxation test, shear and bulk modulus, identification algorithm, Bessel functions

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 3.10.2004