

## **ALGORYTM IDENTYFIKACJI CIĄGŁEGO SPEKTRUM CZASÓW RELAKSACJI BIOLOGICZNYCH MATERIA- LÓW LEPKOSPĘŻYSTYCH**

Anna Stankiewicz

**Streszczenie.** Celem pracy było opracowanie algorytmu wyznaczania ciągłego spektrum czasów relaksacji materiałów lepkospężystych na podstawie uzyskanych eksperymentalnie czasowych przebiegów liniowych modułów relaksacji. Zaproponowano nowy algorytm identyfikacji spektrum relaksacji oparty na przybliżeniu modułu relaksacji skończonym szeregiem zmodyfikowanych funkcji Bessela. Przeprowadzona analiza własności algorytmu, w szczególności analiza jego zbieżności oraz dokonana ocena błędu modelu a także przeprowadzone badania numeryczne wskazują, iż opracowana metoda jest dokładnym i łatwym w implementacji narzędziem wyznaczania spektrum czasów relaksacji. Algorytm może znaleźć zastosowanie do badania własności mechanicznych zarówno wysoko uwodnionych materiałach roślinnych poddawanych różnego typu obciążeniom, jak i różnorodnych roztworów wodnych stosowanych w przemyśle rolno-spożywczym.

**Słowa kluczowe:** lepkospężystość, spektrum czasów relaksacji, identyfikacja, zmodyfikowane funkcje Bessela

### **WSTĘP**

Jakość żywności jest wartością istotną zarówno dla konsumentów, jak i dla przemysłu rolno-spożywczego. Konsumentom oczekują produktów żywnościowych wysokiej jakości, odżywczych i bezpiecznych. Wysoka jakość produktów spożywczych gwarantuje dochodowość całego łańcucha produkcyjnego począwszy od uprawy, poprzez przetwarzanie i produkcję, kończąc na sprzedaży. O jakości produktów spożywczych decyduje nie tylko adekwatny system zapewniania jakości oraz optymalny system sterowania z reguły złożonym procesem przetwórczym, ale także jakość przetwarzanych surowców. Materiały roślinne, będące przedmiotem produkcji rolniczej, narażone są na różnego typu obciążenia mechaniczne podczas całego procesu produkcyjnego począwszy od zbioru, poprzez magazynowanie, a skończywszy na operacjach przerobu w zakładach przetwórczych. Szczególnie narażone na uszkodzenia są materiały o znacznej masie i wysokim turgorze w stanie dojrzałości. Dotyczy to zarówno owoców (jabłka,

gruszki) i warzyw korzeniowych (marchew, ziemniaki) jak i roślin przemysłowych, takich jak burak cukrowy. Urazy i długotrwałe obciążenia o charakterze statycznym, powstające już w fazie zbioru i magazynowania, powodują duże straty masowe, a także znaczne straty wartości odżywczych i handlowych. Uzasadnia to konieczność poznania właściwości mechanicznych materiałów roślinnych oraz powiązania ich z parametrami określającymi wymagania jakościowe przemysłu spożywczego. Badania nad mechaniką uszkodzeń, analiza stanów naprężeń i odkształceń w materiałach roślinnych, dostępność nowoczesnych technik pomiarowych oraz rozbudowanych struktur gromadzenia i przetwarzania danych umożliwiają tworzenie i weryfikację szybkich eksperymentalnych metod oceny *on-line* tych materiałów. Ocena ilościowa zmian mechanicznych zachodzących w przetwarzanych materiałach umożliwia bieżącą kontrolę zgodności z wartościami dopuszczalnymi, stanowi także istotną informację dla systemu sterowania produkcją, umożliwia bowiem taką jego adaptację, która pozwala osiągnąć pożądaną jakość produktu finalnego.

Z punktu widzenia wielu zastosowań, w szczególności analizy przebiegu i skutków obciążeń mechanicznych, materiały roślinne mogą być traktowane jako liniowo lepko-sprężyste [De Baerdemeaker i Segerlind 1976, Chen i Chen 1986, Chen 1994, Gołacki 1998]. Pełną informację o własnościach mechanicznych materiału lepko-sprężystego niesie jego spektrum relaksacji [Christensen 1971, Syed Mustapha i Phillips 2000]. Znając spektrum relaksacji można łatwo wyznaczyć inne charakterystyki materiałów lepko-sprężystych: moduł ściśliwości objętościowej, moduł odkształcenia postaciowego lub funkcję pełzania. Spektrum czasów relaksacji umożliwia także weryfikację zgodności danych pochodzących z różnych eksperymentów, np. testu relaksacji i testu pełzania w oparciu o tzw. sprawdzanie krzyżowe [Winter 1997, Malkin i Masalova 2001]. Dla materiałów roślinnych porównanie przebiegów rozkładów gęstości czasów relaksacji, otrzymanych dla materiałów o różnej wilgotności, turgorze lub obciążeniach realizowanych w różnych warunkach, pozwala na ilościową analizę skutków mechanicznej ingerencji w materiał podczas testu [Hellebrand 1995]. Znajomość spektrum relaksacji umożliwia także przewidywanie zachowania się badanych materiałów w warunkach różnych obciążeń.

Spektrum relaksacji nie jest wprost dostępne pomiarowo, musi więc być wyznaczane na podstawie pomiarowo dostępnych charakterystyk materiałów. Jest to jeden z klasycznych problemów reologii. Większość znanych w literaturze metod wyznaczania spektrum relaksacji, opracowanych głównie dla polimerów, bazuje na danych zgromadzonych w wyniku testu, w którym materiał poddawany jest odkształceniom oscylacyjnym o małej amplitudzie w dostatecznie dużym zakresie częstotliwości, a więc wykorzystuje charakterystyki częstotliwościowe, np. [Orbey i Dealy 1991, Elster i in. 1991, Brabec i in. 1997, Paulson i in. 2000]. Tylko kilka metod przeznaczonych do badania materiałów roślinnych opartych jest o pomiary przeprowadzane w dziedzinie czasu [Ter Haar 1950, Fujihara i in. 1995, Hellebrand 1995]. W metodzie Ter Haara spektrum relaksacji przybliżane jest prostą funkcją pierwszej pochodnej modułu relaksacji. Metoda Fujihary i in. oparta jest na aproksymacji spektrum relaksacji kombinacją dwu funkcji wykładniczych. Metody te nie gwarantują wyznaczenia spektrum relaksacji z zadowalającą dokładnością, przede wszystkim jednak nie uwzględniają złego uwarunkowania zadania identyfikacji spektrum relaksacji, co praktycznie uniemożliwia ich zastosowanie.

wanie w przypadku zakłóconych danych pomiarowych. W tej pracy zaprezentowano nową metodę wyznaczania spektrum czasów relaksacji na podstawie czasowych przebiegów modułów relaksacji zgromadzonych w standardowym teście relaksacji naprężeń [Derski i Ziemia 1968, Chen i Chen 1986, Gołacki 1998], zapewniającą dobre przybliżenie spektrum relaksacji zarówno dla dokładnych, jak i zakłóconych pomiarów modułu relaksacji.

## MATERIAŁ I METODY

### Spektrum czasów relaksacji

W zakresie niewielkich deformacji związek między naprężeniem  $\sigma(t)$  a odkształceniem  $\gamma(t)$  w materiale lepkosprężystym opisuje całkowe równanie konstytutywne oparte na zasadzie superpozycji Boltzmann [Derski i Ziemia 1968, Christensen 1971]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \lambda) \dot{\gamma}(\lambda) d\lambda$$

gdzie  $G(t)$  jest liniowym modułem relaksacji w pełni scharakteryzowanym dla danego materiału poprzez spektrum czasów relaksacji  $H(\tau)$  [Ter Haar 1950, Christensen 1971]

$$G(t) = \int_0^{\infty} H(\tau) e^{-t/\tau} d\tau \quad (1)$$

Funkcja  $H(\tau)$ , opisująca rozkład czasów  $\tau$  relaksacji, charakteryzuje frakcję elementów uogólnionego ciągłego modelu Maxwella o czasach relaksacji zawartych pomiędzy  $\tau$  a  $\tau + d\tau$ .

Identyfikacja spektrum relaksacji  $H(\tau)$  sprowadza się do numerycznego problemu wyznaczenia rozwiązania całkowego równania Fredholma 1-go rodzaju (1) na podstawie danych pomiarowych. Jak wiadomo zadanie to jest źle postawionym problemem odwrotnym [Groetsch 1993], jego rozwiązanie wymaga stosowania specjalnych metod. W tej pracy zaproponowano metodę identyfikacji spektrum relaksacji, w której moduł relaksacji  $G(t)$  przybliża się skończonym szeregiem zmodyfikowanych funkcji Bessela, szeroko stosowanych w fizyce [Tichonow i Samarski 1963] i technice [Węgrzyn 1958], znajdujących także zastosowanie do opisu własności ośrodków lepkosprężystych [Gołacki i Stankiewicz 2002].

### Aproksymacja spektrum relaksacji

Niech funkcja  $H(\tau) \in L_2(0, \infty)$ . Zbiór liniowo niezależnych funkcji

$$\left\{ e^{-\alpha\tau}, \tau e^{-\alpha\tau}, \tau^2 e^{-\alpha\tau}, \dots \right\}, \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

tworzy bazę przestrzeni  $L_2(0, \infty)$  [Tichonow i Samarski 1963], funkcję  $H(\tau)$  można więc rozwinąć w nieskończony szereg funkcyjny

$$H(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \tau^k e^{-\alpha\tau}$$

Spektrum relaksacji  $H(\tau)$  można przybliżyć za pomocą  $K$  pierwszych składników tego szeregu, czyli szeregiem skończonym postaci

$$H_K(\tau) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \tau^k e^{-\alpha\tau} \quad (3)$$

co oznacza przybliżenie modułu relaksacji  $G(t)$  funkcją

$$G_K(t) = \int_0^{\infty} H_K(\tau) e^{-t/\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \phi_k(t, \alpha) \quad (4)$$

gdzie

$$\phi_k(t, \alpha) = \int_0^{\infty} \tau^k e^{-\alpha\tau} e^{-t/\tau} d\tau \quad (5)$$

Podstawowe znaczenie dla konstrukcji algorytmu identyfikacji spektrum czasów relaksacji ma następujące twierdzenie, dowód twierdzenia podano w Dodatku A.

**Twierdzenie 1.** Niech  $k \geq 0$ ,  $\alpha > 0$  i  $t > 0$ . Zachodzi równość

$$\phi_k(t, \alpha) = 2 \frac{\sqrt{t^{k+1}}}{\sqrt{\alpha^{k+1}}} K_{k+1}(2\sqrt{t\alpha}) \quad (6)$$

gdzie  $K_k(x)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela drugiego rodzaju.

Problem przybliżania spektrum czasów relaksacji  $H(\tau)$  szeregiem  $H_K(\tau)$  postaci (3) został więc sprowadzony do problemu aproksymacji modułu relaksacji  $G(t)$  skończonym szeregiem funkcji Bessela postaci

$$G_K(t) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \phi_k(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{K-1} g_k \frac{2 \sqrt{t^{k+1}}}{\sqrt{\alpha^{k+1}}} K_{k+1}(2\sqrt{t\alpha}) \quad (7)$$

Funkcje Bessela  $K_k(x)$  dla argumentu  $x$  rzeczywistego można przybliżyć wyrażeniem asymptotycznym [Tichonow i Samarski 1963]

$$K_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} + \dots$$

wobec tego

$$\phi_k(t, \alpha) = \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{t^{k+1}}}{\sqrt{\alpha^{k+1}} \sqrt[4]{2t\alpha}} e^{-2\sqrt{t\alpha}} + \dots$$

Funkcje  $\phi_k(t, \alpha)$  w szeregu (7) maleją więc wykładniczo dla  $t \rightarrow \infty$ , co dobrze oddaje własności asymptotyczne modułów relaksacji wyznaczonych według uogólnionego dyskretnego modelu Maxwella, jak i rejestrowanych doświadczalnie [Chen i Chen 1986, Gołacki 1998].

### Problem identyfikacji

Załóżmy, że przeprowadzono skończony eksperyment dyskretny, którego rezultatem jest zbiór pomiarów modułów relaksacji  $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$  w chwilach czasu  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gdzie  $z(t_i)$  jest addytywnym błędem pomiarowym.

Jako miarę dokładności modelu (4), lub równoważnie (7), można przyjąć wskaźnik kwadratowy

$$Q_N(\mathbf{g}_K) = \sum_{i=1}^N [\bar{G}(t_i) - G_K(t_i)]^2 \quad (8)$$

gdzie  $\mathbf{g}_K = [g_0 \dots g_{K-1}]^T$  jest K elementowym wektorem nieznanymi współczynników w modelu (3) lub (4). Wprowadzając notację wektorowo-macierzową

$$\Phi_{N,K} = \begin{bmatrix} \phi_0(t_1, \alpha) & \phi_1(t_1, \alpha) & \dots & \phi_{K-1}(t_1, \alpha) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(t_N, \alpha) & \phi_1(t_N, \alpha) & \dots & \phi_{K-1}(t_N, \alpha) \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{G}}_N = \begin{bmatrix} \bar{G}(t_1) \\ \dots \\ \bar{G}(t_N) \end{bmatrix}$$

wskaźnik jakości (8) można zapisać w postaci

$$Q_N(\mathbf{g}_K) = \|\bar{\mathbf{G}}_N - \Phi_{N,K} \mathbf{g}_K\|^2 \quad (9)$$

gdzie  $\|\cdot\|$  oznacza normę euklidesową w przestrzeniach  $R^N$  i  $R^K$ .

Problem identyfikacji spektrum czasów relaksacji w klasie funkcji  $H_K(\tau)$  postaci (3) sprowadza się więc do rozwiązania następującego zadania optymalizacji:

$$\min_{\mathbf{g}_K \in R^K} [Q_N(\mathbf{g}_K) = \|\bar{\mathbf{G}}_N - \Phi_{N,K} \mathbf{g}_K\|^2] \quad (10)$$

Przybliżenie funkcji  $H(\tau)$  szeregiem  $H_K(\tau)$  (3) ogranicza zbiór rozwiązań dopuszczalnych do skończonej wymiarowej podprzestrzeni  $\text{Lin}\{e^{-\alpha\tau}, \tau e^{-\alpha\tau}, \dots, \tau^{K-1} e^{-\alpha\tau}\} \subset L_2(0, \infty)$ . W konsekwencji problem identyfikacji ciągłego spektrum czasów relaksacji został sprowadzony do dyskretnego problemu najmniejszej sumy kwadratów (10). Własności funkcji  $\phi_k(t, \alpha)$  (6) powodują jednak, że macierz  $\Phi_{N,K}$  w zadaniu (10) jest źle uwarunkowana nawet dla niewielkich wartości N i K. Oznacza to, że nawet rozwiązanie normalne (o minimalnej normie) zadania (10)  $\bar{\mathbf{g}}_K^N = \Phi_{N,K}^+ \bar{\mathbf{G}}_N$ , gdzie  $\Phi_{N,K}^+$  oznacza pseudoodwrotność Moore'a-Penrose'a macierzy  $\Phi_{N,K}$ , jest nieciągłą i nieograniczoną

funkcją wektora danych pomiarowych  $\bar{\mathbf{G}}_N$  i nawet bardzo małe błędy w pomiarach mogą spowodować dowolnie duże zmiany rozwiązania. Zadanie (10) jest więc źle postawione w sensie Hadamarda [Groetsch 1993]. Remedium może być taka modyfikacja funkcji celu w zadaniu (10), która bez zmiany dziedziny zadania prowadzi do zadania dobrze postawionego o rozwiązaniu bliskim rozwiązaniu zadania oryginalnego, czyli jego regularyzacja.

### Regularyzacja

Tichonow [Tikhonov 1963] zaproponował metodę regularyzacji polegającą na stabilizacji rozwiązania zadania (10) poprzez minimalizację zmodyfikowanego wskaźnika jakości

$$\min_{\mathbf{g}_K \in \mathbb{R}^K} \left[ \left\| \bar{\mathbf{G}}_N - \Phi_{N,K} \mathbf{g}_K \right\|^2 + \beta \left\| \mathbf{g}_K \right\|^2 \right] \quad (11)$$

gdzie  $\beta > 0$  jest parametrem regularyzacji.

Drugi kwadratowy składnik sumy minimalizowanej w zadaniu (11) spełnia rolę funkcji kary.

Zadanie (11) jest dobrze uwarunkowane i ma jednoznaczne rozwiązanie, ciągłe zarówno względem  $\Phi_{N,K}$  jak i  $\bar{\mathbf{G}}_N$ , dane wzorem

$$\mathbf{g}_K^\beta = \left( \Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} + \beta \mathbf{I}_{K,K} \right)^{-1} \Phi_{N,K}^T \bar{\mathbf{G}}_N \quad (12)$$

gdzie  $\mathbf{I}_{K,K}$  jest  $K \times K$  wymiarową macierzą jednostkową.

Wzór (12) ma znaczenie głównie teoretyczne, do konstrukcji algorytmu numerycznego wyznaczania macierzy odwrotnej w (12) można zastosować technikę dekompozycji względem wartości szczególnych, w skrócie *SVD* [Kaczorek 1998]. Niech

$$\Psi_{K,K} = \Phi_{N,K}^T \Phi_{N,K} = \mathbf{V} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (13)$$

będzie rozkładem *SVD* symetrycznej macierzy  $\Psi_{K,K}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{K,K}$  jest macierzą ortonormalną,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{K,K}$  jest macierzą utworzoną z wartości szczególnych  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  macierzy  $\Psi_{K,K}$ ,  $r = \text{rzęd}(\Psi_{K,K})$ . W oparciu o (12) i (13), uwzględniając ortonormalność  $\mathbf{V}$  oraz diagonalną strukturę macierzy  $\Omega_\beta = (\Sigma + \beta \mathbf{I}_{K,K})$ , otrzymuje się

$$\mathbf{g}_K^\beta = \mathbf{V} \Omega_\beta^{-1} \mathbf{V}^T \Phi_{N,K}^T \bar{\mathbf{G}}_N \quad (14)$$

gdzie

$$\Omega_\beta^{-1} = \text{diag}(1/(\sigma_1 + \beta), \dots, 1/(\sigma_r + \beta), 1/\beta, \dots, 1/\beta) \quad (15)$$

## WYNIKI I DYSKUSJA

### Analiza

Zastosowanie regularyzacji Tichonowa służy stabilizacji algorytmu wyznaczania wektora  $\mathbf{g}_K^\beta$  (12), ocenę skuteczności tego podejścia umożliwia następująca własność.

Niech  $\Phi_{N,K} = \mathbf{U} \Sigma_1 \mathbf{V}^T$  będzie rozkładem SVD macierzy  $\Phi_{N,K}$ , macierz  $\mathbf{V}$  jest tożsama z macierzą  $\mathbf{V}$  w rozkładzie (13) macierzy  $\Psi_{K,K}$ , ortonormalna macierz  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N,N}$ , macierz  $\Sigma_1 = \text{diag}(\sqrt{\sigma_1}, \dots, \sqrt{\sigma_r}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{N,K}$  [Kaczorek 1998].

**Własność 1.** Niech  $\alpha > 0$  oraz  $\beta > 0$ . Dla  $\mathbf{g}_K^\beta$  zachodzi równość

$$\|\mathbf{g}_K^\beta\|^2 = \sum_{i=1}^r \frac{\sigma_i}{(\sigma_i + \beta)^2} (\mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \quad (16)$$

oraz oszacowanie

$$\|\mathbf{g}_K^\beta\| \leq \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\sigma_i}}{(\sigma_i + \beta)} \|\mathbf{z}_N\| + \sum_{i=1}^r \frac{\sqrt{\sigma_i}}{(\sigma_i + \beta)} \|\mathbf{G}_N\| \quad (17)$$

gdzie  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N]$ ,  $\mathbf{z}_N = [z(t_1) \dots z(t_N)]^T$  i  $\mathbf{G}_N = [G(t_1) \dots G(t_N)]^T$ .

Dowody równości (16) i nierówności (17) wynikają wprost ze wzoru  $\mathbf{g}_K^\beta = \mathbf{V} \Omega_\beta^{-1} \Sigma_1 \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{G}}_N$ , diagonalnej struktury macierzy  $\Omega_\beta^{-1}$  (15) oraz  $\Sigma_1$  i ortonormalności macierzy  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$ .

Norma  $\|\mathbf{g}_K^\beta\|$  jest malejącą funkcją parametru regularyzacji  $\beta$  i  $\|\mathbf{g}_K^\beta\| = \|\mathbf{g}_K^N\|$  dla  $\beta = 0$ .

Ponieważ  $0 < \sigma_r = \min \{ \sigma_i : \sigma_i > 0 \}$  z równości (16) wynika następujące oszacowanie

$$\|\mathbf{g}_K^\beta\|^2 > \frac{\sigma_r}{(\sigma_r + \beta)^2} (\mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \quad (18)$$

Norma  $\|\mathbf{g}_K^\beta\|$  rośnie więc nieograniczenie, gdy zarówno  $\beta$  jak i  $\sigma_r$  dążą do zera. Dla  $\beta = 0$  (rozwiązanie niezregularyzowane) jeśli wartość szczególna  $\sigma_r$  jest mała, w szczególności gdy  $\sigma_r \rightarrow 0^+$  zachodzi  $\frac{\sigma_r}{(\sigma_r + \beta)^2} (\mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 = \frac{1}{\sigma_r} (\mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \rightarrow \infty$ .

Nawet bardzo małe wahania wektora danych  $\bar{\mathbf{G}}_N$  powodują wówczas bardzo duże przyrosty  $\|\mathbf{g}_K^\beta\|$ , czyli duże wahania wektora  $\mathbf{g}_K^\beta$  – problem jest wtedy źle postawiony.

Dla  $\beta > 0$ , gdy  $\sigma_r \rightarrow 0^+$  zachodzi  $\frac{\sigma_r}{(\sigma_r + \beta)^2} (\mathbf{u}_r^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \rightarrow 0^+$ . Równocześnie mia-

ownik każdego ze składników sumy w (16) jest wówczas skończony, ograniczony i wygładzony jest więc także wektor  $\mathbf{g}_K^\beta$ . Równość (16) i oszacowanie (18) ilustrują więc mechanizm regularyzacji.

Ocenę wpływu parametru regularyzacji  $\beta$  na jakość modelu (4) z wektorem  $\mathbf{g}_K^\beta$  umożliwia następująca własność, jej słuszność wynika wprost ze wzorów (9) i  $\mathbf{g}_K^\beta = \mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}_\beta^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{U}^T \bar{\mathbf{G}}_N$ .

**Własność 2.** Niech  $\alpha > 0$  oraz  $\beta > 0$ . Dla  $\mathbf{g}_K^\beta$  zachodzi równość

$$Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) = Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) + \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2}{(\beta + \sigma_i)^2} (\mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \quad (19)$$

lub równoważnie

$$Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) = Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) + \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2}{(\beta + \sigma_i)^2 \sigma_i} (\mathbf{y}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \quad (20)$$

gdzie  $\mathbf{Y} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Phi}_{N,K} \mathbf{V}^T = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_K]$ .

Wskaźnik jakości identyfikacji  $Q_N(\mathbf{g}_K^\beta)$  jest więc rosnącą funkcją parametru regularyzacji  $\beta$ . W oparciu o równość (20) zachodzi oszacowanie

$$Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) < Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) + \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2}{\sigma_i^3} (\mathbf{y}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2$$

Dla dowolnego  $\alpha > 0$  błąd modelu zregularyzowanego  $\mathbf{e}_{N,K}^\beta = \bar{\mathbf{G}}_N - \boldsymbol{\Phi}_{N,K} \mathbf{g}_K^\beta$  dąży więc do błędu modelu normalnego  $\bar{\mathbf{e}}_{N,K}^N = \bar{\mathbf{G}}_N - \boldsymbol{\Phi}_{N,K} \bar{\mathbf{g}}_K^N$  liniowo ze względu na  $\beta$ , gdy  $\beta \rightarrow 0^+$ .

### Dobór parametru regularyzacji

Na podstawie (19) zachodzi  $Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) > Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N)$ , stabilizacja rozwiązania odbywa się więc kosztem pogorszenia jakości wyznaczonego modelu. Naturalną strategią doboru parametru regularyzacji  $\beta$  jest taki jego dobór, aby gwarantował on założoną dokładność  $\hat{Q}_N > Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N)$  aproksymacji modułu relaksacji, czyli aby  $Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) = \hat{Q}_N$  lub, uwzględniając równość (20)

$$Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) + \sum_{i=1}^r \frac{\beta^2}{(\beta + \sigma_i)^2 \sigma_i} (\mathbf{y}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 = \hat{Q}_N \quad (21)$$

gdzie

$$Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) = \|\bar{\mathbf{G}}_N\|^2 - \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} (\mathbf{y}_i^T \bar{\mathbf{G}}_N)^2 \quad (22)$$



Wskaźnik  $Q_N(\mathbf{g}_K^\beta)$  jest dla  $\beta > 0$  monotonicznie rosnącą funkcją argumentu  $\beta$ , równanie (21) posiada więc dla  $\beta > 0$  jednoznaczne rozwiązanie  $\hat{\beta}$ , do jego wyznaczenia można zastosować dowolną metodę numeryczną rozwiązywania równań nieliniowych, np. gwarantującą kwadratową zbieżność metodę Newtona, bowiem również pochodna lewej strony równania (21) dana jest prostą formułą analityczną.

Interpretację przedstawionej reguły oraz ważną własność uzyskanego rozwiązania

$$\hat{\mathbf{g}}_K = \mathbf{g}_K^{\hat{\beta}} \tag{23}$$

podaje następujące twierdzenie, jego dowód zamieszczono w Dodatku B.

**Twierdzenie 2.** Niech  $\alpha > 0$  oraz  $\hat{Q}_N > Q_N(\hat{\mathbf{g}}_K^N)$ . Rozwiązanie zregularyzowane  $\hat{\mathbf{g}}_K$  określone warunkami (21) i (23) jest jedynym rozwiązaniem zadania optymalizacji

$$\min_{\mathbf{g}_K \in \mathbb{R}^K} \|\mathbf{g}_K\|^2 \quad \text{przy ograniczeniu} \quad Q_N(\mathbf{g}_K^\beta) \leq \hat{Q}_N \tag{24}$$

Z twierdzenia 2 wynika, że dobór parametru regularyzacji zgodnie z regułą (21), gwarantując założoną dokładność dopasowania modelu do danych eksperymentalnych, oznacza wybór wśród wszystkich rozwiązań spełniających warunek  $Q_N(\mathbf{g}_K) \leq \hat{Q}_N$  rozwiązania o minimalnej normie, czyli najlepsze wygładzenie wektora  $\hat{\mathbf{g}}_K$ .

Dla dowolnego  $H_K(\tau)$  postaci (3) zachodzi

$$\max_{\tau \geq 0} |H_K(\tau)| \leq \sum_{k=0}^{K-1} |g_k| \max_{\tau \geq 0} (\tau^k e^{-\alpha\tau}) = \sum_{k=0}^{K-1} |g_k| \left( \frac{k}{e \cdot \alpha} \right)^k$$

a stąd, w oparciu o równoważność norm w skończonej wymiarowej przestrzeni  $\mathbb{R}^K$ , zachodzi oszacowanie

$$\max_{\tau \geq 0} |H_K(\tau)| \leq \max \left\{ \sqrt{K} \|\mathbf{g}_K\|, \left( \frac{K-1}{e \cdot \alpha} \right)^{K-1} \sqrt{K} \|\mathbf{g}_K\| \right\} \tag{25}$$

Wygładzenie rozwiązania  $\mathbf{g}_K^\beta$  problemu dyskretnego (11) gwarantuje więc równocześnie ograniczenie fluktuacji spektrum relaksacji  $H_K(\tau)$  dla dowolnej wartości czasu relaksacji  $\tau \geq 0$ . Dla spektrum

$$\hat{H}_K(\tau) = \sum_{k=0}^{K-1} \hat{g}_k \tau^k e^{-\alpha\tau} \tag{26}$$

górne oszacowanie  $H_K(\tau)$  dane prawą stroną nierówności (25) jest najmniejsze w zbiorze funkcji  $H_K(\tau)$  postaci (3) gwarantujących założoną dokładność identyfikacji  $\hat{Q}_N$ .

W literaturze znanych jest kilka reguł doboru parametru regularyzacji, ich przegląd podają Groesch [1993] oraz George i Nair [1994]. Część z nich kładzie nacisk na wartość normy  $\|\mathbf{g}_K^\beta\|$ , inne uwzględniają wartość wskaźnika jakości modelu, czyli miary jego niezrównoważenia i stanowią modyfikacje zasady niezrównoważenia Morozowa [1966]. Regułę omówioną powyżej można także traktować jako pewną modyfikację tej zasady.

### Zbieżność

Rozwiązanie zregularyzowane  $\hat{\mathbf{g}}_K$  stanowi oczywiście jedynie przybliżenie rozwiązania normalnego wyjściowego zadania najmniejszych kwadratów (10), które można by uzyskać dla dokładnych pomiarów modułu relaksacji  $\mathbf{g}_K^N = \Phi_{N,K}^+ \mathbf{G}_N$ . Dokładność przybliżenia zależy w szczególności od zakłóceń w pomiarach modułu relaksacji, jej ocenę umożliwia następująca własność.

**Własność 3.** Niech  $\alpha > 0$ . Błąd rozwiązania zregularyzowanego  $\hat{\mathbf{g}}_K$  spełnia nierówność

$$\|\hat{\mathbf{g}}_K - \mathbf{g}_K^N\| < \frac{1}{\sigma_r} \left[ \sqrt{\hat{Q}_N - Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N)} + \|\mathbf{z}_N\| \right]$$

Wektor współczynników  $\hat{\mathbf{g}}_K$  dąży więc do wektora normalnego  $\mathbf{g}_K^N$ , liniowo ze względu na  $\|\mathbf{z}_N\|$ , gdy równocześnie  $\hat{Q}_N - Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N) \rightarrow 0^+$  i  $\|\mathbf{z}_N\| \rightarrow 0^+$ .

### Algorytm

*Krok 1:* Przeprowadź eksperyment (test relaksacji naprężeń) i zgromadź pomiary  $\bar{G}(t_i)$  modułu relaksacji w chwilach czasu  $t_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

*Krok 2:* Oblicz macierze  $\Phi_{N,K}$  i  $\Psi_{K,K}$  a następnie wyznacz rozkład SVD macierzy  $\Psi_{K,K}$ .

*Krok 3:* Oblicz  $Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N)$  (22), dobierz dokładność identyfikacji  $\hat{Q}_N > Q_N(\bar{\mathbf{g}}_K^N)$  a następnie wyznacz parametr regularyzacji  $\bar{\beta}$  rozwiązując równanie nieliniowe (21).

*Krok 4:* Wyznacz macierz odwrotną  $\Omega_{\bar{\beta}}^{-1}$  (15).

*Krok 5:* Wyznacz rozwiązanie zregularyzowane  $\hat{\mathbf{g}}_K$  według wzoru (14) dla  $\beta = \bar{\beta}$ .

*Krok 6:* Wyznacz spektrum czasów relaksacji  $\bar{H}_K(\tau)$  dane szeregiem funkcyjnym (26).

Algorytm obliczeniowy można także oprzeć o rozkład SVD  $N \times K$  wymiarowej macierzy  $\Phi_{N,K}$ , jednak zastosowania SVD  $K \times K$  wymiarowej macierzy  $\Psi_{K,K}$  istotnie redukuje rozmiar zadania, zazwyczaj bowiem  $K \ll N$ . Rozkład SVD symetrycznej i dodatnio półokreślonej  $\Psi_{K,K}$  jest tożsamy z jej rozkładem spektralnym (czyli rozkła-

dem względem wartości własnych macierzy [Kaczorek 1998]), jednak dla niesymetrycznej macierzy  $\Phi_{N,K}$  rozkład spektralny nie istnieje, podczas gdy rozkład *SVD* jest dobrze określony. Rozkład *SVD* macierzy  $\Psi_{K,K}$  jest z obliczeniowego punktu widzenia głównym etapem algorytmu. W literaturze znane są metody numeryczne wyznaczania *SVD*, najczęściej stosowane algorytmy bazują na tzw. odbiciach Householdera. Procedury *SVD* są dostępne w prawie każdym pakiecie obliczeniowym (np. w Mathcadzie i Matlabie).

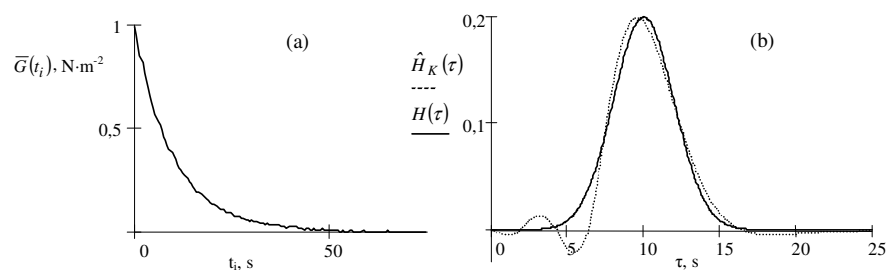
Badania numeryczne wskazują, że najlepsze rezultaty gwarantuje dobór parametru  $\alpha \in [1, 10]$ , im większe czasy relaksacji dominują w spektrum badanego materiału, tym mniejszą wartość należy nadać parametrowi  $\alpha$ . W prawie wszystkich przetestowanych przykładach dobór  $K \in [10, 40]$  elementów szeregu (3) gwarantował zadawalającą jakość aproksymacji. Badania numeryczne wskazują także, że metoda zapewnia dobre rezultaty w szerokim zakresie czasów relaksacji  $10^{-2} \leq \tau \leq 10^3$ .

**Przykład numeryczny**

Dany ośrodek lepkosprężysty, którego spektrum relaksacji opisane jest rozkładem Gaussa

$$H(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2 \rho^2}\right)$$

z parametrami  $\tau_0 = 10$  i  $\rho = 2$ . Przebieg modułu relaksacji  $\bar{G}(t) = G(t) + z(t)$  z addytywnymi zakłóceniami pomiarowymi  $z(t)$  o rozkładzie jednostajnym w przedziale  $[-0.005, 0.005]$  przedstawia rysunek 1a.



Rys. 1. Przebieg modułu relaksacji (rys. a)  $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$  z zakłóceniami pomiarowymi i spektrum czasów relaksacji (rys. b)  $H(\tau)$  (linia ciągła) i przybliżenie  $\hat{H}_K(\tau)$  (linia przerywana)

Fig. 1. Relaxation modulus (fig. a)  $\bar{G}(t_i) = G(t_i) + z(t_i)$  corrupted by additive noise and relaxation time spectrum (fig. b)  $H(\tau)$  (solid line) and approximation  $\hat{H}_K(\tau)$  (dash line)

Wyznaczono wartości modułu relaksacji  $\overline{G}(t_i)$  w  $N = 150$  punktach pomiarowych rozłożonych równomiernie w przedziale czasu 0–74.5 s. Dla rozwiązania normalnego  $\|\overline{\mathbf{g}}_K^N\| = 464.006$ . Ponieważ  $Q_N(\overline{\mathbf{g}}_K^N) = 0.001046$ , przyjęto  $Q_N(\mathbf{g}_K) \leq \hat{Q}_N$ . Wyznaczono  $\beta^{\square} = 0.015$ . Na rysunku 1b przedstawiono przebieg „rzeczywistego” spektrum  $H(\tau)$  oraz przybliżenia  $\hat{H}_K^{\square}(\tau)$ , norma  $\|\hat{\mathbf{g}}_K\| = 0.03184$ . W przykładzie przyjęto  $K = 20$  oraz  $\alpha = 1$ .

## PODSUMOWANIE

Aproksymacja funkcji  $H(\tau)$  skończonym szeregiem funkcyjnym  $H_K(\tau)$  postaci (3) pozwoliła sprowadzić problem identyfikacji spektrum czasów relaksacji do statycznego problemu najmniejszych kwadratów. Zastosowanie funkcji bazowych postaci (2), dla których całki (4) dane są zwartą formułą analityczną, pozwoliło także, co szczególnie istotne w kontekście źle postawionego problemu odwrotnego, uniknąć błędów przybliżeń kwadratur numerycznego całkowania, występujących w znanych algorytmach [Groetsch 1993, Paulson i in. 2000] wyznaczania ciągłego spektrum relaksacji. Równocześnie własności zmodyfikowanych funkcji Bessela gwarantują bardzo dobre dopasowanie modelu (7) do danych doświadczalnych. Pokazano także, iż wygładzenie rozwiązania problemu zregulowanego gwarantuje wygładzenie wyznaczonego spektrum relaksacji. Wynik identyfikacji, czyli wyznaczone spektrum relaksacji, zależy oczywiście zarówno od przyjętego modelu (3), w szczególności od  $K$ , przyjętego kryterium jakości (9), jak i od konkretnych danych pomiarowych  $\{t_i, \overline{G}(t_i)\}$ . Oszacowanie spektrum relaksacji asymptotycznie (dla  $N \rightarrow \infty$ ) niezależne od momentów czasu  $\{t_i\}$  można uzyskać, stosując schemat apriorycznej randomizacji eksperymentu zaproponowany w pracy [Hasiewicz i Stankiewicz 1985]. Procedurę można także rozszerzyć o nadrzędny moduł odpowiedzialny za dobór optymalnego parametru  $\alpha$ , co prowadzi do dwupoziomowej struktury algorytmu identyfikacji [Stankiewicz 1995].

W wielu zastosowaniach [Derski i Ziemia 1968, Elster i in. 1991, Malkin i Masalova 2001] istotne znaczenie ma również znajomość spektrum retardacji (opóźnienia) określającego rozkład czasów retardacji materiałów lepkosprężystych opisanych uogólnionym modelem Kelvina [Derski i Ziemia 1968, Owens i Phillips 2002]. Jeżeli znamy spektrum relaksacji badanego materiału, to jego spektrum retardacji można wyznaczyć, stosując algorytm przedstawiony w pracy [Baumgaertel i Winter 1989]. Do wyznaczania spektrum retardacji na podstawie zakłóconych dyskretnych pomiarów czasowych przebiegów funkcji pełzania, zgromadzonych w standardowym teście pełzania [Derski i Ziemia 1968], można także, po niewielkich modyfikacjach, zastosować schemat identyfikacji zaproponowany w tej pracy. W odpowiednio zmodyfikowanym algorytmie funkcję pełzania materiału lepkosprężystego przybliża się skończonym szeregiem kombinacji liniowych zmodyfikowanych funkcji Bessela drugiego rodzaju oraz funkcji stałych.

**Dodatek A**

Dowód Twierdzenia 1 przeprowadzimy nie wprost. Najpierw wykazemy słuszność wzoru dla  $k = 0$ . Stosując w całce (5) podstawienie  $\sqrt{\alpha} \tau = \sqrt{t} e^\eta$ , otrzymujemy

$$\phi_0(t, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha\tau} e^{-1/\tau} d\tau = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^\infty e^{-2\sqrt{t\alpha} \cosh(\eta)} e^\eta d\eta$$

Stąd, uwzględniając parzystość funkcji  $\cosh(\eta)$  oraz równość  $K_k(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-x \cosh(\eta) - k\eta} d\eta$  [Tichonow i Samarski 1963], dostajemy

$$\phi_0(t, \alpha) = 2 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\alpha}} K_1(2\sqrt{t\alpha})$$

Żałómy teraz, że równość (6) jest prawdziwa dla pewnego  $k \geq 0$ . Łatwo sprawdzić, że

$$\phi_{k+1}(t, \alpha) = \int_0^\infty \tau^{k+1} e^{-\alpha\tau} e^{-1/\tau} d\tau = (-1) \frac{\partial \phi_k(t, \alpha)}{\partial \alpha}$$

czyli uwzględniając (6)

$$\phi_{k+1}(t, \alpha) = \frac{(k+1)\sqrt{t^{k+1}}}{\alpha \sqrt{\alpha^{k+1}}} K_{k+1}(2\sqrt{t\alpha}) - 2 \frac{\sqrt{t^{k+2}}}{\sqrt{\alpha^{k+2}}} K'_{k+1}(2\sqrt{t\alpha}) \tag{A1}$$

Ponieważ dla funkcji Bessela zachodzą związki rekurencyjne  $K_{-k}(x) = K_k(x)$  oraz  $K'_k(x) = -\frac{1}{2} [K_{k-1}(x) + K_{k+1}(x)]$  równość (A1) przyjmuje postać

$$\phi_{k+1}(t, \alpha) = \frac{(k+1)\sqrt{t^{k+1}}}{\alpha \sqrt{\alpha^{k+1}}} K_{k+1}(2\sqrt{t\alpha}) + \frac{\sqrt{t^{k+2}}}{\sqrt{\alpha^{k+2}}} [K_k(2\sqrt{t\alpha}) + K_{k+2}(2\sqrt{t\alpha})]$$

Stąd uwzględniając wzór  $2k K_k(x) = -x [K_{k-1}(x) - K_{k+1}(x)]$  uzyskujemy ostatecznie

$$\phi_{k+1}(t, \alpha) = \frac{(-1)\sqrt{t^{k+1}} \sqrt{t\alpha}}{\alpha \sqrt{\alpha^{k+1}}} [K_k(2\sqrt{t\alpha}) - K_{k+2}(2\sqrt{t\alpha})] + \frac{\sqrt{t^{k+2}}}{\sqrt{\alpha^{k+2}}} [K_k(2\sqrt{t\alpha}) + K_{k+2}(2\sqrt{t\alpha})]$$

czyli

$$\phi_{k+1}(t, \alpha) = 2 \frac{\sqrt{t^{k+2}}}{\sqrt{\alpha^{k+2}}} K_{k+2}(2\sqrt{t\alpha})$$

Pokazaliśmy więc, że równość (6) zachodzi także dla  $k + 1$ .

**Dodatek B**

Dowód Twierdzenia 2. Niech  $\mathbf{g}_K \neq \hat{\mathbf{g}}_K$  będzie rozwiązaniem dopuszczalnym zadania (24). Wówczas  $Q_N(\mathbf{g}_K) \leq \hat{Q}_N$ . Wektor  $\hat{\mathbf{g}}_K = \mathbf{g}_K^{\hat{\beta}}$  jest jednoznacznym rozwiązaniem zadania (11) dla parametru  $\hat{\beta}$ , czyli dla każdego  $\mathbf{g}_K \neq \hat{\mathbf{g}}_K$  zachodzi nierówność

$$Q_N(\hat{\mathbf{g}}_K) + \hat{\beta} \|\hat{\mathbf{g}}_K\|^2 < Q_N(\mathbf{g}_K) + \hat{\beta} \|\mathbf{g}_K\|^2$$

lub uwzględniając, że  $Q_N(\hat{\mathbf{g}}_K) = \hat{Q}_N$ , równoważnie

$$\hat{\beta} \left[ \|\mathbf{g}_K\|^2 - \|\hat{\mathbf{g}}_K\|^2 \right] > Q_N(\hat{\mathbf{g}}_K) - Q_N(\mathbf{g}_K) = \hat{Q}_N - Q_N(\mathbf{g}_K) \quad (\text{B1})$$

Ponieważ  $Q_N(\mathbf{g}_K) \leq \hat{Q}_N$  z (B1) wynika nierówność  $\hat{\beta} \left[ \|\mathbf{g}_K\|^2 - \|\hat{\mathbf{g}}_K\|^2 \right] > 0$ , czyli dla każdego dopuszczalnego  $\mathbf{g}_K \neq \hat{\mathbf{g}}_K$  zachodzi  $\|\mathbf{g}_K\|^2 > \|\hat{\mathbf{g}}_K\|^2$ . Wektor  $\hat{\mathbf{g}}_K$  jest więc jednoznacznym rozwiązaniem zadania optymalizacji (24).

**PIŚMIENNICTWO**

- Brabec Ch. J., Rögl H., Schausberger A., 1997. Investigation of relaxation properties of polymer melts by comparison of relaxation time spectra calculated with different algorithms. *Rheol. Acta* 36, 667–676.
- Baumgaertel M., Winter H. H., 1989. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data. *Rheol. Acta* 28, 511–519.
- Chen P., Chen S., 1986. Stress relaxation functions of apple under high loading rates. *Transaction of the ASAE* 29, 1754–1759.
- Chen P., 1994. Creep response of generalised Maxwell model. *Int. Agrophysics* 8, 555–558.
- Christensen R. M., 1971. *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. Academic Press New York.
- De Baerdemeaker J. G., Segerlind L. J., 1976. Determination of the viscoelastic properties of the apple flesh. *Transaction of the ASAE* 19, 346–353.
- Derski W., Ziemia S., 1968. *Analiza modeli reologicznych*. PWN Warszawa.
- Elster C., Honerkamp J., Weese J., 1991. Using regularization methods for the determination of relaxation and retardation spectra of polymeric liquids. *Rheol. Acta* 30, 161–174.
- Fujihara S., Yamamoto R., Masuda Y. 1995. Maxwellian Spectra of Stress Relaxation in the Cell Wall and Growth Regulation in Higher Plants. *Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin*, Prague 1995, 47–51.
- George S., Nair M. T., 1994. Parameter choice by discrepancy principles for ill-posed problems leading to optimal convergence rates. *J. Optim. Theory Appl.* 183, 217–222.
- Gołacki K., 1998. Charakterystyki lepkosprężyste korzeni marchwi w szerokim zakresie prędkości obciążeń mechanicznych. *Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie*, 216.
- Gołacki K., Stankiewicz A., 2002. Algorytm obliczeniowy wyznaczania współczynnika Poissona lepkosprężystego materiału roślinnego. *Acta Agrophysica* 78, 51–61.
- Groetsch C. W., 1993. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg Publishing Wiesbaden.
- Hasiewicz Z., Stankiewicz A., 1985. On Input-Independent System Identification by Monte-Carlo Approach. *IEEE Transaction on Automatic Control* 30 (5), 480–483.

- Hellebrand H. J., 1995. Comparison of Models for Evaluation of Stress Relaxation. Proc. of Int. Workshop Stress Relaxation in Solids and Biological Origin, Prague 1995, 3–10.
- Kaczorek T., 1998. Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice. WNT Warszawa.
- Malkin A. Ya., Masalova I., 2001. From dynamic modulus via different relaxation spectra to relaxation and creep functions. Rheol. Acta 40, 261–271.
- Morozov V. A. 1966. On the solution of functional equations by the method of regularization. Soviet Mathematics Doklady 7, 414–417.
- Orbey N., Dealy J. M., 1991. Determination of the relaxation spectrum from oscillatory shear data. J. Rheol. 35(6), 1035–1049.
- Owens R. G., Phillips T. N., 2002. Computational Rheology. Imperial College Press London.
- Paulson K. S., Jouravleva S., McLeod C. N. 2000. Dielectric Relaxation Time Spectroscopy. IEEE Trans. on Biomedical Engineering 47, 1510–1517.
- Phan-Thien N., Safari-Ardi M., 1998. Linear viscoelastic properties of flour-water doughs at different water concentrations. J. Non-Newtonian Fluid Mech. 74, 137–150.
- Stankiewicz A., 1995. A decentralized three-level scheme for global identification of complex steady-state systems. Proc. Second International Symposium on Methods and Models in Automation and Robotics. Międzyzdroje 1995, 299–304.
- Syed Mustapha S. M. F. D., Phillips T. N., 2000. A dynamic nonlinear regression method for the determination of the discrete relaxation spectrum. J. Phys. D: Appl. Phys. 33, 1219–1229.
- Ter Haar D., 1950. A Phenomenological Theory of Visco-Elastic Behaviour. I. Physica XVI, 719–737.
- Tichonov A. N., Samarski A. A., 1963. Równania fizyki matematycznej. PWN Warszawa.
- Tikhonov A. N., 1963. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. Soviet Mathematics Doklady 4, 1035–1038.
- Winter H. H., 1997. Analysis of dynamical mechanical data: inversion into a relaxation time spectrum and consistency check. J. Non-Newtonian Mech. 68, 225–239.
- Węgrzyn S., 1958. Przebiegi niestabilne w elektrycznych liniach i układach łańcuchowych. PWN Warszawa.

## A SCHEME FOR IDENTIFICATION OF CONTINUOUS RELAXATION TIME SPECTRUM OF BIOLOGICAL VISCOELASTIC MATERIALS

**Abstract.** The purpose of the paper is to investigate an algorithm for recovery of the continuous relaxation time spectrum of viscoelastic materials from time-measurements of linear relaxation modulus. A new identification scheme based on the least-squares approximation of relaxation modulus by finite series of modified Bessel functions is proposed. The analysis of the scheme properties, in particular the convergence and model error analysis, as well as the numerical studies conducted indicates that the scheme proposed is an accuracy and easy implementable tool for recovery of the relaxation time spectra. The identification algorithm can be successfully applied to study the mechanical properties of highly hydrated plant materials subjected to various kinds of loading as well as different water solutions used in the food industry.

**Key words:** viscoelasticity, relaxation time spectrum, identification, Bessel modified functions

*Anna Stankiewicz, Katedra Podstaw Techniki, Akademia Rolnicza w Lublinie, ul. Doświadczalna 50A, 20-280 Lublin, e-mail: astan@hortus.ar.lublin.pl*